# Capacità e definizione puntuale delle funzioni di Sobolev

## 1. Capacità

Dati $R > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$ e un insieme $A \subset \mathbb{R}^d$, definiamo

$$\text{cap}\big(A; B_{2R}(x_0)\big) = \inf\Big\{ \int_{B_{2R}(x_0)} |\nabla u|^2\,dx \ : \ u \in H^1_0(B_{2R}(x_0))\,,\ u \geq 1 \text{ a.e. in un intorno di } A \cap B_R(x_0)\Big\}.$$

Inoltre, possiamo assumere a priori che le funzioni $u$ siano positive, ovvero

$$\begin{aligned}\text{cap}\big(A; B_{2R}(x_0)\big) = \inf\Big\{ \int_{B_{2R}(x_0)} |\nabla u|^2\,dx \ : u \in H^1_0(B_{2R}(x_0))\,,\\ 0 \leq u \leq 1 \text{ in } B_{2R}(x_0)\,,\\ u = 1 \text{ a.e. in un intorno di } A \cap B_R(x_0)\Big\}.\end{aligned}$$

Scriveremo spesso il problema nella seguente maniera

$$\text{cap}\big(A; B_{2R}(x_0)\big) = \inf\Big\{ \int_{B_{2R}(x_0)} |\nabla u|^2\,dx \ : \ u \in \mathcal{K}\big(A; B_{2R}(x_0)\big)\Big\},$$

dove l'insieme $\mathcal{K}\big(A; B_{2R}(x_0)\big)$ di funzioni ammissibili è dato da

$$\mathcal{K}\big(A; B_{2R}(x_0)\big) := \Big\{u \in H^1_0(B_{2R}(x_0))\,,\ u = 1 \text{ a.e. in un intorno di } A \cap B_R(x_0)\,,\ 0 \leq u \leq 1 \text{ in } B_{2R}(x_0)\Big\}.$$

## 2. Esempi e osservazioni sulla capacità degli insiemi aperti

In seguito, in questa sezione, saranno utili i seguenti risultati

**Lemma A.** Sia $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Allora, sono equivalenti:
(1) $u \in H^1_0(B_R)$;
(2) $u = 0$ Lebesgue a.e. su $\mathbb{R}^d \setminus B_R$.

*Proof.* L'implicazione (1) $\Rightarrow$ (2) è ovvia. Dimostriamo che (2) $\Rightarrow$ (1). Sia $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ una funzione tale che $u = 0$ a.e. su $\mathbb{R}^d \setminus B_R$. Consideriamo la funzione

$$u_\varepsilon(x) := u\big((1+\varepsilon)x\big).$$

Allora, $u_\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^d)$ e $u_\varepsilon$ converge forte-$H^1(\mathbb{R}^d)$ a $u$ (oin realtà, la convergenza debole-$H^1(\mathbb{R}^d)$ è sufficiente). Inoltre, $u_\varepsilon \equiv 0$ a.e. in $\mathbb{R}^d \setminus B_{R/(1+\varepsilon)}$. Di consequenza, $u_\varepsilon \in H^1_0(B_R)$. Ma allora anche $u \in H^1_0(B_R)$. □

**Lemma B.** Sia $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Allora, sono equivalenti:
(1) $u \in H^1_0(\mathbb{R}^d \setminus B_R)$;
(2) $u = 0$ Lebesgue a.e. su $B_R$.

**Lemma C.** Sia $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Allora, sono equivalenti:
(1) $u - h_R \in H^1_0(B_{2R} \setminus \overline{B}_R)$;
(2) $u = 1$ Lebesgue a.e. su $B_R$ e $u = 0$ Lebesgue a.e. su $\mathbb{R}^d \setminus B_{2R}$;

dove $h_R$ è la funzione dell'esempio successivo.

**Esempio 1.** *La capacità di $B_R$ in $B_{2R}$ è data da*

$$\text{cap}(B_R; B_{2R}) = \int_{B_{2R} \setminus B_R} |\nabla h_R|^2\,dx,$$

*dove $h_R$ è la funzione armonica*

$$\Delta h_R = 0 \quad in \quad B_{2R} \setminus B_R\,, \qquad h_R \equiv 1 \quad on \quad B_R, \qquad h_R \equiv 0 \quad in \quad \mathbb{R}^d \setminus B_{2R},$$

*ovvero $h_R$ è l'unica soluzione del problema variazionale*

$$\min\Big\{\int_{B_{2R}} |\nabla u|^2\,dx \ :\ u \in H^1_0(B_{2R}),\ u = 1 \ \ a.e.\ on\ B_R\Big\}.$$

*In particolare,*

$$h_R(x) = h_1(x/R),$$

*e di conseguenza,*

$$\mathrm{cap}(B_R; B_{2R}) = \int_{B_{2R}\setminus B_R} |\nabla h_R|^2\,dx = R^{d-2}\int_{B_2\setminus B_1} |\nabla h_1|^2\,dx = C_d R^{d-2}.$$

**Esercizio 2.** *Più in generale, per ogni $0 < r < R$, la capacità di $B_r$ in $B_R$ è data da*

$$\mathrm{cap}(B_r; B_R) = \int_{B_R\setminus B_r} |\nabla h_{r,R}|^2\,dx,$$

*dove $h_{r,R}$ è la funzione armonica*

$$\Delta h_{r,R} = 0 \quad in \quad B_R \setminus B_r\,, \qquad h_{r,R} = 1 \quad on \quad B_r, \qquad h_{r,R} = 0 \quad in \quad \mathbb{R}^d \setminus B_R.$$

*Calcolare esplicitamente*

$$\mathrm{cap}(B_r; B_R)$$

*in funzione di $r, R$ e la dimensione $d$.*

**Lemma 3.** *Se $A \subset B_R$ è un aperto, allora esiste una funzione $u_A$ che realizza il minimo*

$$\min\Big\{\int_{B_{2R}} |\nabla u|^2\,dx \ :\ u \in H^1_0(B_{2R}),\ u = 1 \ \ a.e.\ su\ A\Big\}.$$

*Inoltre,*

- *il minimo $u_A$ è unico;*
- $0 \le u_A \le 1$ *su $B_{2R}$;*
- $\mathrm{cap}(A; B_{2R}) = \int_{B_{2R}} |\nabla u_A|^2\,dx$;
- *se $A_1 \subset A_2$ sono due aperti, allora*

$$u_{A_1} \le u_{A_2} \qquad e \qquad \int_{B_{2R}} |\nabla u_{A_2}|^2\,dx \ge \int_{B_{2R}} |\nabla u_{A_1}|^2\,dx.$$

**Corollario 4.** *Se $A \subset B_R$, allora*

$$\mathrm{cap}(A; B_{2R}) = \min\Big\{\int_{B_{2R}} |\nabla u|^2\,dx \ :\ u \in \mathcal{K}(A; B_{2R}),\ u \le h_R \ \ a.e.\ su\ B_{2R}\Big\},$$

*dove $h_R$ è l'unica soluzione del problema variazionale*

$$\min\Big\{\int_{B_{2R}} |\nabla u|^2\,dx \ :\ u \in H^1_0(B_{2R}),\ u = 1 \ \ a.e.\ su\ B_R\Big\}.$$

---

## 3. La capacità di un insieme di misura positiva

Sia $A \subset \mathbb{R}^d$ un insieme misurabile e sia $u \in H^1_0(B_{2R})$ una funzione tale che $u \ge 1$ in un intorno di $A \cap B_R$. Allora, per la disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg-Sobolev

$$|A \cap B_R|^{\frac{d-2}{d}} \le \Big(\int_{A\cap B_R} u^{\frac{2d}{d-2}}\Big)^{\frac{d-2}{d}} \le \Big(\int_{B_{2R}} |u|^{\frac{2d}{d-2}}\Big)^{\frac{d-2}{d}} \le C_d \int_{B_{2R}} |\nabla u|^2\,dx,$$

dove $C_d$ è una costante dimensionale. Di conseguenza,

$$|A \cap B_R|^{\frac{d-2}{d}} \le C_d\,\mathrm{cap}(A; B_{2R}).$$

## 4. Tracce e insiemi di capacità positiva

Sia $\Omega$ un insieme aperto con bordo regolare $C^1$ in $\mathbb{R}^d$. Supponiamo

$$0 \in \partial\Omega$$

e che $\partial\Omega \cap B_R$ sia il grafico di una funzione $C^1$.

$$g : B'_R \to \mathbb{R}.$$

Se $A$ sia un sottoinsieme di $\partial\Omega \cap B_R$ di misura di Lebesgue $\mathcal{L}^{d-1}$ positiva su $\partial\Omega$ (ovvero tale che $g^{-1}(A) \subset \mathbb{R}^{d-1}$ ha misura di Lebesgue positiva in $\mathbb{R}^{d-1}$), allora

$$\mathrm{cap}(A; B_{2R}) > 0.$$

Infatti, per il teorema della traccia, se $u$ è una funzione in $\mathcal{K}(A; B_{2R})$ tale che $u = 1$ in un intorno di $A$, allora

$$\mathcal{H}^{d-1}(A \cap B_R) \le \int_{\partial\Omega \cap B_R} u^2 \, d\mathcal{H}^{d-1} \le C_{d,R} \int_{B_{2R}} |\nabla u|^2 \, dx.$$

## 5. Alcune proprietà generali della capacità

**Lemma 5.** *Siano $A_1 \subset A_2$ due sottoinsiemi di $B_R \subset \mathbb{R}^d$. Allora,*

$$\mathrm{cap}(A_1; B_{2R}) \le \mathrm{cap}(A_2; B_{2R}).$$

**Corollario 6.** *In dimensione $d \ge 2$, la capacità di un punto è nulla.*

*Proof.* Usando la soluzione dell'esercizio 2, mostrare che, per ogni $R > 0$ fissato, si ha

$$\lim_{r \to 0} \mathrm{cap}(B_r; B_R) = 0.$$

Concludere usando Lemma 5. □

**Lemma 7.** *Per ogni insieme $A \subset B_R$ si ha*

$$\mathrm{cap}(A; B_{2R}) = \inf \Big\{ \mathrm{cap}(\Omega; B_{2R}) \ : \ \Omega \text{ aperto}, \ A \subset \Omega \subset B_R \Big\}.$$

*Proof.* Segue direttamente dalla definizione. □

**Proposizione 8.** *Per ogni coppia di insiemi $U, V \subset B_R$ si ha*

$$\mathrm{cap}(U \cup V; B_{2R}) + \mathrm{cap}(U \cap V; B_{2R}) \le \mathrm{cap}(U; B_{2R}) + \mathrm{cap}(V; B_{2R}).$$

*Proof.* Siano $f \in \mathcal{K}\big(U; B_{2R}\big)$ e $g \in \mathcal{K}\big(V; B_{2R}\big)$ tali che

$$\mathrm{cap}(U; B_{2R}) \le \int_{B_{2R}} |\nabla f|^2 \, dx \le \varepsilon + \mathrm{cap}(U; B_{2R}) \qquad \text{e} \qquad \mathrm{cap}(V; B_{2R}) \le \int_{B_{2R}} |\nabla g|^2 \, dx \le \varepsilon + \mathrm{cap}(V; B_{2R}).$$

Mostrare che

$$\mathrm{cap}(U \cup V; B_{2R}) + \mathrm{cap}(U \cap V; B_{2R}) \le \int_{B_{2R}} |\nabla f|^2 \, dx + \int_{B_{2R}} |\nabla g|^2 \, dx.$$

□

**Proposizione 9.** *Siano $B_{2R}$ una palla in $\mathbb{R}^d$ e $(A_k)_{k \ge 1}$ una successione crescente di insiemi tale che*

$$A_k \uparrow A_\infty.$$

*Allora,*

$$\mathrm{cap}(A_k, B_{2R}) \uparrow \mathrm{cap}(A_\infty, B_{2R}).$$

*Proof.* Per ogni $k \ge 1$, scegliamo una funzione ammissibile $u_k \in \mathcal{K}(A; B_{2R})$ tale che

$$\mathrm{cap}(A_k, B_{2R}) \le \int_{B_{2R}} |\nabla u_k|^2 \, dx \le \mathrm{cap}(A_k, B_{2R}) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Per ogni $m \ge 1$, definiamo

$$h_m = \max \Big\{ u_1, u_2, \dots, u_m \Big\}$$

ed osserviamo che

$$h_m = u_m \vee h_{m-1}.$$

Di conseguenza
$$\begin{aligned}\int_{B_{2R}} |\nabla h_m|^2\,dx &= \int_{B_{2R}} |\nabla (h_{m-1}\vee u_m)|^2\,dx\\ &\le -\int_{B_{2R}} |\nabla (h_{m-1}\wedge u_m)|^2\,dx + \int_{B_{2R}} |\nabla h_{m-1}|^2\,dx + \int_{B_{2R}} |\nabla u_m|^2\,dx\\ &\le -\operatorname{cap}(A_{m-1}, B_{2R}) + \int_{B_{2R}} |\nabla h_{m-1}|^2\,dx + \Big(\operatorname{cap}(A_m, B_{2R}) + \frac{\varepsilon}{2^m}\Big).\end{aligned}$$
Quindi, possiamo mostrare per induzione che
$$\int_{B_{2R}} |\nabla h_m|^2 \le \operatorname{cap}(A_m, B_{2R}) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\varepsilon}{2^j}\ .$$
Sia ora
$$h_\infty := \lim_{m\to\infty} h_m\ .$$
Osserviamo che $h_\infty \in H^1_0(B_{2R})$, $h_\infty \ge 1$ in un intorno di $A_\infty$ e che inoltre si ha
$$\int_{B_{2R}} |\nabla h_\infty|^2\,dx \le \lim_{m\to\infty} \operatorname{cap}(A_m, B_{2R}) + \varepsilon\,.$$
Questo conclude la dimostrazione. □

---

## 6. Insiemi di capacità nulla

**Definizione 10.** *Sia $A$ un insieme di $\mathbb{R}^d$. Diremo che $A$ ha capacità nulla se*
$$\operatorname{cap}\big(A; B_{2R}(x_0)\big) = 0 \qquad \textit{per ogni palla} \qquad B_{2R}(x_0)\subset\mathbb{R}^d.$$

**Osservazione 11.** *Se $A\subset\mathbb{R}^d$ ha capacità nulla e $B\subset A$, allora anche $B$ ha capacità nulla.*

**Osservazione 12.** *Se $A\subset\mathbb{R}^d$ e $B\subset\mathbb{R}^d$ hanno capacità nulla, allora anche $A\cup B$ ha capacità nulla.*

**Osservazione 13.** *Se $A_k\subset\mathbb{R}^d$, $k\ge 1$, è una successione di insiemi di capacità nulla, allora anche $A_\infty = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ ha capacità nulla.*

**Proposizione 14.** *Se $A$ può essere ricoperto da una quantita numerabile di palle*
$$B_{R_k}(x_k),\quad k\ge 1,$$
*tali che*
$$\operatorname{cap}\big(A; B_{2R_k}(x_k)\big) = 0 \quad \textit{per ogni} \quad k\ge 1,$$
*allora $A$ ha capacità nulla.*

*Viceversa, se $A$ ha capacità nulla, allora la famiglia di palle*
$$\big\{B_k\big\}_{k\ge 1}$$
*è un ricoprimento numerabile di $A$ e per definizione si ha che*
$$\operatorname{cap}\big(A; B_{2k}\big) = 0 \quad \textit{per ogni} \quad k\ge 1.$$

*Proof.* Sia $B_{R_k}(x_k)$ una famiglia di palle tale che
$$\operatorname{cap}\big(A; B_{2R_k}(x_k)\big) = 0 \quad \text{per ogni} \quad k\ge 1.$$
Sia $B_R(x_0)\subset\mathbb{R}^d$. Possiamo assumere che $x_0 = 0$. Basta mostrare che
$$\operatorname{cap}\big(A; B_{2R}\big) = 0.$$
Siccome
$$A = \bigcup_{k\ge 1} A\cap B_{R_k}(x_k),$$
basta mostrare che
$$\operatorname{cap}\big(A\cap B_{R_k}(x_k); B_{2R}\big) = 0.$$

Ora, fissiamo $\varepsilon > 0$ ed osserviamo che esiste una funzione $u_k \in H^1_0(B_{2R_k}(x_k))$ tale che

$$\int \Big(|\nabla u_k|^2 + u_k^2\Big)\,dx \le \varepsilon \quad \text{e} \quad u_k = 1 \quad \text{in un intorno di} \quad A \cap B_{R_k}(x_k).$$

Sia inoltre $\varphi_R \in H^1(B_{2R})$ una funzione tale che

$$\varphi_R = 1 \quad \text{su} \quad B_R\ , \qquad 0 \le \varphi_R \le 1 \quad \text{e} \quad |\nabla \varphi_R| = \frac{1}{R} \quad \text{su} \quad B_{2R} \setminus B_R\ .$$

Allora,

$$\mathrm{cap}\,\big(A \cap B_{R_k}(x_k); B_{2R}\big) \le \int_{B_{2R}} |\nabla(u_k\varphi_R)|^2\,dx \le 2\int_{B_{2R}} |\nabla u_k|^2 + \frac{2}{R^2}\int_{B_{2R}} u_k^2\,dx \le \Big(2 + \frac{2}{R^2}\Big)\,\varepsilon.$$

Siccome $\varepsilon > 0$ è arbitrario (mentre $R$ è fissato), abbiamo la tesi. □

**Osservazione 15.** *I punti in $\mathbb{R}^d$, $d \ge 2$, hanno capacità nulla.*

**Osservazione 16.** *L'insieme dei punti con coordinate razionali $\mathbb{Q}^d$ ha capacità nulla in $\mathbb{R}^d$, $d \ge 2$.*

**Definizione 17.** *Si dice che una proprietà vale* cap*-quasi-ovunque, se vale al di fuori di un insieme di capacità nulla.*

---

## 7. Capacity estimate

**Proposizione 18.** *Sia $u \in H^1_0(B_{2R})$ una funzione data e sia*

$$A = \Big\{x \in \mathbb{R}^d \ :\ \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x)} u \ge \varepsilon \quad \textit{per un qualche} \quad r \in (0, R/2)\Big\}.$$

*Allora*

$$\mathrm{cap}\,\big(A; B_{2R}\big) \le \frac{C_d}{\varepsilon^2}\int_{B_{2R}} |\nabla u|^2\,dx,$$

*dove $C_d$ è una costante dimensionale.*

*Proof.* Possiamo supporre che $\varepsilon = 0$ e che $u \ge 0$.
Consideriamo la famiglia $\mathcal{F}$ di tutte le palle $B_r(x)$ tali che:

- $x \in A \cap B_R$ ;
- il raggio $r$ è tale che $0 < r < \dfrac{R}{2}$ e $\dfrac{1}{|B_r|}\displaystyle\int_{B_r(x)} u \ge 1.$

Applicheremo alla famiglia $\mathcal{F}$ il seguente teorema di Besicovitch.

**Teorema di ricoprimento di Besicovitch.** Sia $A$ un insieme in $\mathbb{R}^d$. Sia $\mathcal{F}$ una famiglia (non necessariamente numerabile) di palle tale che:

- i centri delle palle $B \in \mathcal{F}$ sono punti di $A$ ;
- $\sup\{\mathrm{diam}(B) : B \in \mathcal{F}\} < +\infty$ ;
- $\mathcal{F}$ è un ricoprimento di $A$.

Allora, esistono $N$ ($N$ è un numero intero che dipende solo dalla dimensione $d$) sottofamiglie di $\mathcal{F}$

$$\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_N$$

tali che:

- $\mathcal{G}_1 \cup \dots \cup \mathcal{G}_N$ è un ricoprimento di $A$;
- ogni famiglia $\mathcal{G}_j$ è costituita di una quantita numerabile di palle disgiunte.

Sia ora $\mathcal{G}_j$ una delle sottofamiglie di $\mathcal{F}$ date dal teorema di Besicovitch. Possiamo scrivere $\mathcal{G}_j$ come

$$\mathcal{G}_j = \Big\{ B_{j,k} \ : \ k \in \mathbb{N} \Big\}.$$

Per ogni palla

$$B_{j,k} := B_{r_{j,k}}(x_{j,k})$$

consideriamo la funzione

$$g_{j,k} := \Big( M(u; B_{j,k}) - u \Big)_+$$

dove

$$M(u; B_{j,k}) := \frac{1}{|B_{j,k}|} \int_{B_{j,k}} u(x)\, dx \geq 1.$$

Sia

$$h_{j,k} \in H^1_0\big(B_{2r_{j,k}}(x_{j,k})\big) \subset H^1_0(B_{2R})$$

un'estensione di $g_{j,k} : B_{j,k} \to \mathbb{R}$. Ricordiamo che possiamo scegliere $h_{j,k}$ in modo di avere

$$h_{j,k} \geq 0 \qquad \text{e} \qquad \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla h_{j,k}|^2 \, dx \leq C_d \left( \int_{B_{j,k}} |\nabla g_{j,k}|^2 \, dx + \frac{1}{r_{j,k}^2} \int_{B_{j,k}} g_{j,k}^2 \, dx \right),$$

dove $C_d$ è una costante dimensionale e $r_{j,k}$ è il raggio di $B_{j,k}$. Ora, per la definizione di $g_{j,k}$, abbiamo

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla h_{j,k}|^2 \, dx &\leq C_d \left( \int_{B_{j,k}} |\nabla g_{j,k}|^2 \, dx + \frac{1}{r_{j,k}^2} \int_{B_{j,k}} g_{j,k}^2 \, dx \right) \\
&\leq C_d \left( \int_{B_{j,k}} |\nabla u|^2 \, dx + \frac{1}{r_{j,k}^2} \int_{B_{j,k}} \big( M(u; B_{j,k}) - u \big)^2 \, dx \right) \\
&\leq C_d \int_{B_{j,k}} |\nabla u|^2 \, dx,
\end{aligned}$$

dove per l'ultima disuguaglianza abbiamo usato la disuguaglianza di Poincaré in $B_{r_{j,k}}$

$$\frac{1}{r^2} \int_{B_r} \left( u - \fint_{B_r} u \right)^2 dx \leq C_d \int_{B_r} |\nabla u|^2 \, dx.$$

Ora, osserviamo che per costruzione

$$u + h_{j,k} \geq M(u; B_{j,k}) \geq 1 \quad \text{in} \quad B_{j,k}.$$

Di conseguenza, scegliendo la funzione

$$h_\infty := \sup \Big\{ h_{j,k} \ : \ j \in \{1, \dots, N_d\}, \ k \in \mathbb{N} \Big\},$$

abbiamo che

$$u + h_\infty \geq 1 \quad \text{in ogni} \quad B_{j,k} \qquad \Rightarrow \qquad u + h_\infty \geq 1 \quad \text{in un intorno di} \quad A \cap B_R.$$

D'altra parte, $h_\infty \in H^1(\mathbb{R}^d)$ e

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla h_\infty|^2 \, dx \leq C_d \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 \, dx,$$

dove $C_d$ è una costante dimensionale. Infine, osserviamo che

$$\mathrm{cap}(A; B_{2R}) \leq \int_{B_{2R}} |\nabla (u + h_\infty)|^2 \, dx \leq 2 \int_{B_{2R}} |\nabla u|^2 \, dx + 2 \int_{B_{2R}} |\nabla h_\infty|^2 \, dx \leq C_d \int_{B_{2R}} |\nabla u|^2 \, dx. \qquad \square$$

## 8. Definizione puntuale delle funzioni di Sobolev

**Lemma 19.** *Sia $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Allora, l'insieme*

$$A = \Big\{x_0 \in \mathbb{R}^d \ : \ \limsup_{r\to 0} \frac{1}{r^{d-2}} \int_{B_r(x_0)} |\nabla u|^2\,dx > 0\Big\}$$

*ha capacità nulla.*

*Proof.* Mostreremo che per ogni $\varepsilon > 0$ l'insieme

$$A_\varepsilon = \Big\{x_0 \in \mathbb{R}^d \ : \ \limsup_{r\to 0} \frac{1}{r^{d-2}} \int_{B_r(x_0)} |\nabla u|^2\,dx > \varepsilon\Big\}$$

ha capacità nulla.

**Step 1.** $A_\varepsilon$ ha misura nulla.

Infatti, siccome $|\nabla u|^2$ è integrabile, abbiamo che per Lebesgue quasi-ogni $x_0 \in \mathbb{R}^d$ il limite

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{r^d} \int_{B_r(x_0)} |\nabla u|^2\,dx$$

esiste ed è finito. D'altra parte, per i punti $x_0 \in A_\varepsilon$, questo limite è $+\infty$.

**Step 2.** Per ogni $\delta > 0$ esiste un aperto $U_\delta$ che contiene $A_\varepsilon$ ed è tale che

$$\int_{U_\delta} |\nabla u|^2\,dx < \delta.$$

**Step 3.** Consideriamo la famiglia $\mathcal{F}$ di palle $B_r(x_0)$ con centro $x_0 \in A_\varepsilon$ e raggio $r \in (0,1)$ tale che

$$B_r(x_0) \subset U_\delta \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{r^{d-2}} \int_{B_r(x_0)} |\nabla u|^2\,dx > \varepsilon.$$

Applicando il teorema di Besicovitch, otteniamo $N = N(d)$ sottofamiglie di $\mathcal{F}$

$$\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_N$$

di palle disgiunte. Fissiamo ora l'indice $j$ e scriviamo

$$\mathcal{G}_j = \Big\{B_{j,k} \ : \ k \ge 1\Big\}.$$

Con $r_{j,k}$ invece denoteremo il raggio della palla $B_{j,k}$.

**Step 4.** Fissiamo ora la palla $B_R$, dove $R > 1$ è un raggio abbastanza grande. Consideriamo l'insieme

$$A_j = \Big\{x \in B_{j,k} \cap B_R \ : \ k \ge 1\Big\}.$$

Mostreremo che

$$\mathrm{cap}(A_j; B_{2R}) \le C_d \frac{\delta}{\varepsilon}.$$

Ora, per ogni palla $B_{j,k} = B_r(x)$ (in $\mathcal{G}_j$ e tale che $B_R \cap B_{j,k} \neq \emptyset$) consideriamo una funzione radiale $h_{j,k}$ tale che

$$h_{j,k} = 1 \quad \text{su} \quad B_r(x)\ , \qquad h_{j,k} \in H^1_0(B_{2r}(x))\ , \qquad |\nabla h_{j,k}| = \frac{1}{r} \quad \text{su} \quad B_{2r}(x) \setminus B_r(x).$$

Prendendo

$$h_j := \max_k h_{j,k},$$

otteniamo che $h_j \in H^1_0(B_{2R})$

$$h_j = 1 \quad \text{su} \quad A_j$$

e

$$\int_{B_{2R}} |\nabla h_j|^2\,dx \le \sum_k \int_{B_{2r_{j,k}}(x_{j,k})} |\nabla h_{j,k}|^2\,dx = C_d \sum_k \frac{1}{r_{j,k}^{d-2}}$$
$$\le \frac{C_d}{\varepsilon} \sum_k \int_{B_{j,k}} |\nabla u|^2\,dx \le \frac{C_d}{\varepsilon} \int_{U_\delta} |\nabla u|^2 \le C_d \frac{\delta}{\varepsilon}\ .$$

**Step 5.** Ora siccome

$$A_\varepsilon \cap B_R \subset \bigcup_{j=1}^{N} A_j,$$

abbiamo che

$$\mathrm{cap}(A_\varepsilon \cap B_R; B_{2R}) \leq C_d \frac{\delta}{\varepsilon}.$$

Siccome la costante $\delta$ è arbitraria, abbiamo la tesi. □

**Teorema 20.** *Per ogni $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ esiste un insieme $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^d$, di capacità nulla, tale che il limite*

$$\lim_{r\to 0} \fint_{B_r(x_0)} u(x)\, dx$$

*esiste per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{N}$.*

*Proof.* Mostreremo che per ogni $R > 0$ esiste un insieme $\mathcal{N}(R) \subset B_R$ di capacità nulla in $B_{2R}$ e tale che

$$\lim_{r\to 0} \fint_{B_r(x_0)} u(x)\, dx \quad \text{esiste per ogni} \quad x_0 \in B_R \setminus \mathcal{N}(R).$$

A meno di moltiplicare $u$ con una funzione cut-off, possiamo assumere che $u \in H^1_0(B_{2R})$.

Sia $A$ l'insieme studiato nel lemma precedente

$$A = \Big\{ x_0 \in \mathbb{R}^d \ :\ \limsup_{r\to 0} \frac{1}{r^{d-2}} \int_{B_r(x_0)} |\nabla u|^2\, dx > 0 \Big\}.$$

Allora, per ogni

$$x_0 \in \mathbb{R}^d \setminus A,$$

abbiamo

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^2}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} |\nabla u|^2\, dx = 0.$$

Di conseguenza, per la disuguaglianza di Poincaré,

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} \Big( u(x) - M\big(u; B_r(x_0)\big)\Big)^2 dx = 0 \qquad \text{dove} \qquad M(u; B_r(x_0)) = \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} u(x)\, dx\,.$$

Fissiamo ora $\varepsilon > 0$ e per ogni $n \geq 1$ scegliamo una funzione $\varphi_n \in C^\infty_c(B_{2R})$ tale che

$$\|u - \varphi_n\|_{H^1(B_{2R})} \leq \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Definiamo l'insieme

$$A_n = \Big\{ x_0 \in B_R \ :\ \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} |u - \varphi_n|\, dx > \frac{1}{2^{n/2}} \qquad \text{per un qualche raggio} \quad r \in (0, {}^R\!/\!_2) \Big\}.$$

Per la Proposizione 18, abbiamo che

$$\mathrm{cap}(A_n; B_{2R}) \leq C_d 2^n \int_{B_{2R}} |\nabla v_n|^2\, dx \leq \frac{C_d}{2^n} \varepsilon\,.$$

Ora, definendo

$$A_\varepsilon = \bigcup_{n\geq 1} A_n$$

abbiamo che

$$\mathrm{cap}\,\big(A_\varepsilon\, ;\, B_{2R}\big) \leq C_d \varepsilon$$

e per ogni $x_0 \in B_R \setminus A_\varepsilon$ si ha

$$\frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} |u - \varphi_n|\, dx \leq \frac{1}{2^{n/2}} \quad \text{per ogni} \quad r \in (0, {}^R\!/\!_2) \quad \text{e per ogni} \quad n \geq 1.$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned}|\varphi_n(x_0) - M(u; B_r(x_0))| \le \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x_0)} |\varphi_n - \varphi_n(x_0)|\,dx \\ + \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x_0)} |u - M(u; B_r(x_0))|\,dx \\ + \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x_0)} |\varphi_n - u|\,dx.\end{aligned}$$

e quindi

$$\limsup_{r\to 0} \big|\varphi_n(x_0) - M(u; B_r(x_0))\big| \le \frac{1}{2^{n/2}}.$$

Ma allora, per ogni $m, n \in \mathbb{N}$,

$$|\varphi_n(x_0) - \varphi_m(x_0)| \le \frac{1}{2^{n/2}} + \frac{1}{2^{m/2}}.$$

Quindi la successione di funzioni

$$\varphi_n : B_R \setminus (A \cup A_\varepsilon) \to \mathbb{R}$$

converge uniformemente ad una funzione continua

$$\varphi_\varepsilon : B_R \setminus (A \cup A_\varepsilon) \to \mathbb{R}$$

e per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^d \setminus (A \cup A_\varepsilon)$, si ha

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0} \big|\varphi_\varepsilon(x_0) - M(u; B_r(x_0))\big| &\le \limsup_{r\to 0} \Big(\big|\varphi_\varepsilon(x_0) - \varphi_n(x_0)\big| + \big|\varphi_n(x_0) - (u; B_r(x_0))\big|\Big) \\ &= \big|\varphi_\varepsilon(x_0) - \varphi_n(x_0)\big| + \limsup_{r\to 0} \big|\varphi_n(x_0) - (u; B_r(x_0))\big| \le \frac{2}{2^{n/2}}.\end{aligned}$$

Siccome $n$ è arbitrario, abbiamo

$$\lim_{r\to 0} \big|\varphi_\varepsilon(x_0) - M(u; B_r(x_0))\big| = 0.$$

In particolare, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^d \setminus (A \cup A_\varepsilon)$ esiste il limite

$$\lim_{r\to 0} M(u; B_r(x_0)).$$

Infine, definiamo $\mathcal{N}(R)$ come $\mathcal{N}_R = A \cap \left(\bigcap_{\varepsilon>0} A_\varepsilon\right)$. □